Tahditiet qosra dwar il-Matematika mxandra fuq ir-Radju ta' l-Universita'

Josef Lauri
Dipartiment tal-Matematika
Universita' ta' Malta

1 It-taghlim tal-matematika

Nahseb li kull min xoghlu jinvolvi l-matematika, per ezempju bhali, nghallem il-matematika fl-Universita', mhux darba jew tnejn ikollu din l-esperjenza. Tkun xi mkien, tiltaqa' ma' xi hadd li jistaqsik x'taghmel, u meta ssemmilu l-matematika ighidlek "dak hu s-suggett li l-aktar ma kontx inhobb fl-iskola" jew li "l-aktar li kont immur hazin fih".

X'inhi din il-matematika li minn naha hafna ma jiddejqux ighidu kemm ma humiex tajbin fiha, waqt li minn naha ohra hemm min jiddedika hajtu jistudjaha? U ighid li jiehu gost! U ukoll: Ghaliex ghalkemm hafna joboghdu l-matematika jew jibzghu minnha, tista' tghid kulhadd jaqbel li hija importanti u li ghandna nghallmuha sewwa u lil kulhadd fl-iskejjel?

Irrid nammetti, hafna mill-matematika li nitghallmu fl-iskola anki lili kienet iddejjaqni—specjalment dik li konna nitghallmu fil-klassijiet elementari. Aktar milli iddejjaqni nghid ma kinitx taghtini gost. Ghaliex wahda mir-ragunijiet principali ghaliex wiehed ghandu jistudja l-matematika hija biex jiehu gost, jiehu sodisfazzjon. U nahseb din hi wahda mill-problemi ta' kif tigi mghallma l-matematika: nemfazizzaw l-utilita' taghha imma mhux is-sbuhija taghha u l-gost u sodisfazzjon li wiehed jista' jiehu meta jara jew isib soluzzjoni ghal problema matematika. Ha naghmel analogija ma' l-istudju tal-lingwa u l-lettaratura. Jekk ma tkunx taf tikteb u taqra' tkun mitluf fid-dinja tal-lum, u ghalhekk biss huwa diga raguni tajba hafn ghaliex it-taghlim tal-kitba u l-qari huwa daqshekk importanti. Min ma jafx jikteb u jaqra' lanqas sinjali tat-toroq ma jkun jista' jifhem, jew xi avviz fuq gazzetta, u lanqas ikun jista' jikteb ittra biex japplika ghal impieg.

Imma kieku r-ragunijiet li ghalihom nitghallmu niktbu u naqraw kienu dawn biss—u dawn huma ragunijiet importanti—kieku hadd ma jiehu pjacir jikteb u jaqra l-poezija, per ezempju. Ghalhekk fl-iskejjel, barra mill-utilita' tal-lingwa, nitghallmu kemm hu sabih l-istudju u l-uzu tal-lingwa, u kemm nistghu niehdu gost b'xoghlijiet letterarji.

Xi haga simili nistghu nghidu ghall-matematika. Huwa essenzjali li kullhadd fis-socjeta' tal-lum ikollu almenu xi livell ta' *numeracy* igifieri ikun

jaf ighodd, jimmoltiplika, jiddividi ecc.—ikun jaf juza n-numri. Imqar bl-ghajnuna ta' *calculator*. U dan it-tahrig utli jnghata, u ghandu jinghata, minn mindu nkunu zghar. Imma b'hekk biss ma nkunux qed nghallmu l-matematika. Ma nkunux qed nuru x'inhu sabih fil-matematika u ghaliex hemm min iqatta' hajtu jiehu pjacir jaghmel il-matematika. U fuq kollox ma nkunux qed inwasslu lill-istudenti parti importanti mill-istorja tal-bniedem. Ghaliex il-matematika, bhal-letteratura, bhall-arti, bhall-muzika, hija wahda mill-holqien monumentali tal-bniedem.

Din il-problema ta' kif tharreg student fit-teknika ta' xi suggett u fl-istess hin twassallu s-sbuhija tas-suggett, u ma titilfux kmieni ghaliex jaqta' qalbu wara l-ewwel ftit passi, nahseb illi hija wahda mill-isfidi ewlenin li ghandu quddiemu kull ghalliem ta' kull suggett. Jekk per ezempju wiehed qed jitghallem il-pjanu, sabih kieku wara ftit lezzjonijiet ikun jista' jitpaxxa jdoqq xi bicca minn kuncert. Imma biex tasal sa dak il-livell, jekk ma tkunx xi Mozart, trid hafna snin ta' xoghol iebes, trid tipprattika ddoqq skali li, specjalment f'livell elementari, zgur ma jpaxxukx daqs kemm kieku qed iddoqq kuncert. Jekk ma jkollokx perseveranza, xewqa li titghallem, u ghalliem li jimmotivak, taqta' qalbek wara ftit.

Illum l-ghalliema ghandhom hafna aktar ghodda biex jaghmlu t-taghlim ta' suggett aktar interessanti. Fosthom il-computer. U l-uzu tal-computer u l-matematika imorru hafna flimkien. Ghalhekk, l-ghalliema tal-matematika u s-suggetti xjentifici in generali, forsi huma minn ta' l-ewwel li qed jintlaqtu mir-rivoluzzjoni tal-computer—allavolja nafu illi t-taghlim tas-suggetti kollha qed jigi influwenzat minn din l-ghodda gdida ta' taghlim.

Imma irridu noqoghdu attenti ghaliex din l-ghodda, billi taghmel it-taghlim ehfef, jekk tintuza hazin tista' fil-fatt taghmel hsara. Illum il-mezzi tat-telekomunikazzjoni qeghdin jaghmluha ehfef minn qatt qabel illi takkwista l-informazzjoni. Illum, mill-kumdita' ta' darek tista' anki tfittex u tqalleb f'libreriji mid-dinja kollha.

U fit-taghlim tal-matematika, anki sempliciment bl-introduzzjoni ta' calculators fil-klassi, issa ilna hafna snin naraw diehla l-kultura li, billi taghfas buttuna, taghmel f'nifs dak li qabel kien jehodlok hafna hin jew kien diificli wisq biex taghmlu. U din mhiex haga hazina jekk b'dan il-mod innaqqsu dak li hu tedjuz u mhux interessanti fit-taghlim tas-suggett halli jkollna aktar hin ghal dak li hu aktar importanti u sabih.

Imma jkun zball jekk dawn it-teknologiji irawmu l-kultura li kollox hu hafif u li t-taghlim u l-gharfien hu immeddjat. Ghaliex kull haga li taghtik sodisfazzjon taghmilha trid timpenjak, trid tahdem iebes ghaliha. Dawk il-holqien monumentali tal-bniedem li semmejt—l-arti, l-muzika, l-matematika, ecc—huma frott ta' dan l-impenn.

Meta qabel ghidt illi wahda mir-ragunijiet principali li ghaliha tistudja l-matematika hija biex tiehu gost u sodisfazzjon, ma kontx qed nifhem gost frivolu u momentarju ta' meta taghmel xi haga fuq fuq, imma kont qed nifhem is-sodisfazzjon li thoss meta taghmel xi haga b'impenn. Mhux qed

nghid li hajjitna ghandha tkun kollha impenn—allahares ikun hekk. Imma l-impenn jista' anki jkun mod ta' zvog u mistrieh, apparti minn mod kif wiehed jizviluppa ruhu. Nahseb hafna minnkom ghandkom xi passatemp li jimpenjakom, johdilkom hafna hin, u trid hafna xoghol biex taghmlu sew. Imma hija propju din il-htiega ta' reqqa u attenzjoni li thajjerk tkompli b'dan il-passatemp.

Nahseb li t-taghlim ta' kull suggett fl-iskola, barra milli jemfazizza l-utilita' prattika tas-suggett, ghandu jrawwem fl-istudent l-imhabba ghal dan l-impenn. Il-kultura li kollox hu hafif hi kultura anti-intellettwali. Il-kultura ta' l-impenn serju f'dak li qed taghmel hija ghazla ta' valur. Dan l-impenn serju jista' jigi pprattikat f'diversi materji: l-istudju ta' lingwa, l-arti, sports, muzika, matematika. Li ssolvi problema matematika ghandha titqies bhala sfida ghal mohh zaghzugh, sfida li trawwem dan il-valur ta' l-impenn u li tharreg il-mohh—u tharrgu mhux biss ghax tajjeb tkun taf taghmel is-somom.

Ghax nghiduha kif inhi, hafna minna qatt m'hu sa jkollom bzonn juzaw f'hajjithom il-matematika li tghallmu l-iskola. Kemm minna jkollna bzonn f'darna jew fuq il-post tax-xoghol l-algebra u l-geometrija li tghallimna? Allura ghalfejn nitghallmuha? Imma dan l-argument japplika tista' tghid ghal kull suggett li nitghallmu fl-edukazzjoni formali taghna. Kemm minna nuzaw fil-hajja ta' kuljum il-geografija, l-istorja, il-lettaratura li tghallimna? Dawn is-suggetti kollha ghandhom dawk l-aspetti li huma importanti b'mod dirett ghall-hajja u x-xoghol ta' kuljum ta' kullhadd. Imma jkun zball jekk l-edukazzjoni taghna temfazizzaw biss it-taghlim ta' dawn l-aspetti.

Dan l-izball facli jsir fit-taghlim tal-matematika l-ewwel nett ghaliex l-importanza ta' l-aspetti utli ghall-hajja ta' kuljum fil-matematika hija cara u accettat minn kulhadd—li ma tkunx taf tghodd hija hazin daqs kemm li ma tkunx taf taqra—ghalhekk dan l-aspett zgur ghandu jigi emfazizzat. Minn naha l-ohra, biex tapprezza aktar is-sbuhija ta' suggett bhall-matematika trid bilfors tghaddi minn certu tahrig li mhux dejjem hu hafif. Ghalhekk hemm ir-riskju li dan l-aspett jigi injorat—specjalment jekk nistennew li nitghallmu minghajr impenn, jekk nistennew li kollox jigi hafif.

U lanqas ghandna nipprovaw nahbu dan il-bzonn ta' impenn mill-istudenti. Ghaliex bl-istudju tal-matematika l-istudent, barra milli jitghallem affarijiet prattici, ghandu jakkwista l-valur li jimpenja ruhu minghajr ma jaghmel gwadan immedjat hlief dak intellettwali. U fuq kollox, il-matematika hija suggett illi l-istudenti jaraw li jirbhu mhux principji awtoritarji imma s-sens komun, l-immaginazzjoni u l-hsieb kreattiv—u dawn il-valuri fil-matematika jistghu jitwasslu anki lit-tfal zghar fil-bidu ta' l-istudji taghhom.

Inhoss illi l-matematika fl-iskejjel, apparti milli ghandha titqies bhala suggett illi jaghti lill-student *skills* essenzjali ghall-hajja, ghandna nharsu lejha ukoll u nghallmuha bhalma nahseb li ghandna nghallmu suggett bhall-arti, per ezempjju. Ma nghallmux l-arti biex kulhadd isir artist. Lanqas ma

nippretendu li kull student jinqala' biex ipingi. Imma kull student ghandu jinghata l-ahjar opportunita' li jifhem is-sbuhija tas-suggett, li jitghallem japprezza kemm is-suggett hu *achievement* kbir ta' l-uminta' u kemm hu importanti fl-istorja tal-bniedem, u li, anki jekk mhux sa jsir artist jew matematiku, almenu ikun tghallem ftit mis-sengha u impenn li jinhtieg biex tohloq xoghol artistiku jew xoghol matematiku tajjeb.

Nahseb ukoll li t-taghlim tal-matematika fl-iskejjel ghandu jkollu aspetti li jxbhu t-taghlim ta' l-istorja. Ghaliex l-istorja tal-matematika tmur id f'id ma' l-istorja ta' kif zviluppa l-bniedem. Il-matematika f'kull epoka tirrifletti l-bzonnijiet li l-bniedem kellu dawk iz-zminijiet. U l-matematika evolviet hekk kif dawn il-bzonnijiet bdew isiru aktar sofistikati, u l-metodi kif issolvi l-problemi li jinqalghu ghalhekk kellhom isiru aktar sofistikati.

Hemm evidenza cara li anki fil-Mesopotamja Antika u fil-Babilonja kellhom xi gharfien ta' matematika li ma kinitx sempliciment li tghodd 1 u 1 biex jaghmlu tnejn. Hafna minn din il-matematika kellha x'taqsam malgeometrija, u tistennija ghax il-geometrija ghandha x'taqsam hafna ma' bzonnijiet bazici bhal kif taqsam l-art u kif tibni. L-Egizzjani riedu bilfors ikunu jafu ftit geometrija mhux hazin biex setghu jibnu l-piramidi. Matematika mhux elementari saret ukoll essenzjali malli dawn il-kulturi antiki bdew jinteressaw ruhhom fl-astronomija. U l-astronomija, specjalment fl-origini taghha, aktar milli kienet konnessa ma' bzonnijiet materjali, kellha x'taqsam ma' twemmin religjuz; u hekk naraw il-matematika tizviluppa ma' attivitajiet tal-bniedem li jmorru lil hemm mill-bzonnijiet immedjati u materjali.

Imma kienu l-Griegi li hadhu dan it-taghrif matematiku u bdew jistudjawh b'mod sistematiku u logiku, u b'hekk effettivament holqu l-matematika kif nifmuha illum. Dan ix-xoghol tal-Griegi kien influwenzat u influwenza il-filosofija generali taghhom, u l-mod kif bdew jaghmlu l-matematika huma u kif ghadna naghmluha illum influwenza hafna kif nahsbuha f'diversi oqsma ohra. Fi programm iehor nitkellem naqra aktar fit-tul fuq kif il-Griegi bdew jaghmlu l-matematika.

Fid-disa' u l-ghaxar sekli kien hemm xoghol importanti hafna li sar minn matematici Izlamici. Fost affarijit ohra hallewlna s-sistema ta' kif niktbu n-numri illum. Dawn il-matematici, li sikwiet kienu jkunu anki astronomi, kienu, fost affarijiet ohrajn, zviluppaw metodi kif minn fejn tkun tista' tikkalkula id-direzzjoni tal-Mekka ghal hinijiet tat-talb. Kienu anki zviluppaw metodi ta' kalkoli li kellhom applikazzjoniji fil-mod kumplikat li wiehed ried jaqsam wirt taht ligi Musulmana. Nergghu naraw kif l-izvilupp tal-matematika huwa marbut mill-qrib mal-kultura ta' min ikun qed jaghmilha.

Mis-sittax-il-seklu 'l hawn il-progress tal-matematika kien hafna aktar mghaggel milli qatt kien fis-sekli ta' qabel, u dan imhabba il-progress kbir xjentifiku u teknologiku li beda jsehh. Ghalhekk dan l-izvilupp beda jkun iccentrat l-aktar f'dawk il-pajjizi fejn kien qed isir dan il-progress xjentifiku, fl-Ewropa u mbaghad fl-Amerka ta' fuq.

Illum, allavolja f'dawn il-pajjizi tad-dinja ghad hemm l-akbar koncen-

trazzjoni ta' istituzzjonijiet avvanzati ghall-istudju tal-matematika, bil-mezzi ta' kommunikazzjoni tal-lum id-dinja ckienet u minn kullimkien qed jigi kontribut ghall-progress fil-matematika—biz-zejjed tara kemm isiru konferenzi matematici f'kull parti tad-dinja.

U l-applikazzjonijiet tal-matematika ma ghadhomx ikkoncentrati daqshekk madwar suggetti xjentifici u teknologici, bhall-fizika u inginerija. Illum, suggetti bhal statistika, per ezempju, huma ghodda essenzjali ghall-ekonomija u l-istudji socjali. Suggett bhal-*management science* f'hafna universitajiet iqisuh kwazi fergha tal-matematika—jistudjaw l-analisi ta' decizjonijiet u l-analizi ta' riskji: per ezempju, decizjoni li trid taghzel bejn investiment u iehor; jistudjaw modijiet aktar efficenti kif tiddizinja strutturi u servizzi: per ezempju, l-ahjar mod kif tghaddi cables tat-telefon biex tnaqqas it-tul ta' cable li ghandek bzonn.

U f'dan l-izvilupp tal-matematika parti importanti taghmilha dik l-ghodda moderna li diga semmejna: il-computer.

Fil-programmi li jmiss ikolli cans nespandi ftit izjed dwar uhud minn dawn l-ideat li semmejt illum.

2 L-Algebra

L-algebra hija wahda mill-kolonni principali tal-matematika. Nahseb li l-mument li nibdew nitghallmu l-algebra fl-iskola hu mument krucjali li jifred dawk li sa jsiru jhobbu l-matematika minn dawk li sa jistmerruwha. Huwa mument li ghall-ewwel darba inkunu qed naraw aspett importanti hafna tal-matematika, igifieri li m'hijiex biss kalkoli bin-numri, imma manipulazzjoni b'ittri ta' l-alfabet li jiehdu post in-numri.

Niftakar ghall-ewwel li bdejna nitghallmu l-algebra l-iskola, u r-rizultat ta' problema ma kienx ikun numru, kif konna dejjem imdorrijin, imma xi espressjoni bhal $a + b$. Konna nistaqsu lill-ghalliem, "Imma x'inhu ir-rizultat?" L-ghalliem kien jispjegalna li mhux biss gibna r-rizultat b'dik l-espressjoni, imma gibna hafna rizultati f'daqqa. Ghaliex kull valur li jistghu jiehdu l-ittri a u b fl-espressjoni $a + b$ jaghtina rizultat. Igifieri mhux biss inkunu solvejna problema wahda, imma inkunu solvejna hafna problemi differenti, kull wahda skond x'valuri ghandhom a u b.

Hawnhekk naraw aspetti importanti hafna tal-matematika. L-ewwel nett illi l-matematika m'hijiex biss kalkolu numeriku, imma hija studju ta' strutturi, ta' *patterns*. Fl-algebra elementari li nistudjaw fl-iskola, il-*patterns* huma dawk il-formuli li nitghallmu nimmoltiplikaw u niffattorizzaw. Din il-possibilita' li nistudjaw strutturi mhux numerici b'dan il-mod taghti hafna qawwa lill-matematika. Per ezempju, min jistudja l-kristalli u s-simetriji taghhom, jista' jirraprezenta dawn is-simetriji b'ittri ta' l-alfabet, u jistudja kif simetrija teffettwa lill-ohra billi jimmoltiplika flimkien (b'certi regoli) dawn l-ittri—ftit jew wisq simili ghall-algebra li tghallimna l-iskola.

Dan it-tip ta' studju huwa importanti hafna ghal min ikun qed janalizza l-propjetajiet ta' materjali li l-molekoli taghhom jifformaw kristalli.

Il-possibilita' li, permess ta' l-algebra, wiehed isolvi, kif ghadni kif ghidt, mhux biss problema wahda imma hafna problemi f'daqqa, taghti lill-matematika il-qawwa tal-generalita'. Naghmlu mod, per ezempju, xjentisti sa jitfghu satellita fl-ispazju u jridu jisparawha b'rocket. Iridu jikkalkolaw liema hi l-velocita li biha ghandhom jisparaw ir-rocket, u din tiddependi fuq hafna affarijiet, per ezempju l-piz tar-rocket, l-gholi ta' l-orbita li sa ddur fiha s-satellita, ecc. Joqoghdu bil-qieghda u jaghmlu l-kalkoli ghal valuri li ghandhom dawn il-fatturi kollha. Jekk ftit xhur wara iridu jisparaw rocket iehor ta' daqs differenti u f'orbita differenti iridu jergghu jaghmlu x-xoghol kollu mill-bidu. Allura x'jaghmlu minflok? Fil-formuli taghhom iqieghdu ittri li jiehdu post dawn il-valuri, isolvu l-formuli b'dawn l-ittri, u b'hekk ikollhom soluzzjoni li tista' tintuza mhux darba biss imma kull meta sa jisparaw rocket differenti—kemm ibiddlu l-valuri ta' l-ittri fis-soluzzjoni. Bhal ma kien ighidilna l-ghalliem ta' l-algebra, illi bir-rizultat $a + b$ mhux soluzzjoni wahda ghandek imma hafna, skond x'ghandek bzonn li jkunu a u b.

L-algebra tat ukoll hajja gdida lil geometrija. Naghmlu mod jien ghandi karta quddiemi u qed inpingi oggetti geoemtrici: punti, linji, crieki ecc., u rrid nispjagalkom x'qed inpingi biex tpingu xi haga ezatt bhal tieghi. Irrid naghtikom il-puzizzjoni ta' kull oggett li qed inpingi. Nista' naghmel hekk. Aghmel mod irrid naghtikom il-puzizzjoni ta' punt li qed inpingi dal-hin fuq il-karta. Nghidilkom ibdew mix-xifer ta' isfel tal-karta, imxu tliet centimetri lejn il-lemin, u minn hemm itilghu vertikalment il-fuq zewg centimetri. U dik hi l-puzizzjoni fejn ghandkom tpingu l-punt. B' dan il-mod, kull puzizzjoni fuq il-karta tista' tispjegaha b'zewg numri, horizzontali u vertikali. Dawn in-numri jissejhu l-koordinati Karetzjani, ghall-filosofu u matematiku Franciz Rene Descarte li ivvintahom fis-seklu sbatax .

Permess ta' dawn il-koordinati, kull linja u figura, bhal cirku jew parabola, tista' tiddiskriviha b'ekwazzjoni algebrika. U mistoqsijiet geometrici, bhal per ezempju, jekk zewg linji jiltaqghux jew le, u fejn jiltaqghu, tista' tiddraducihom f'mistoqsijiet ta' algebra: l-ekwazzjonijiet taz-zewg linji, ghandhom soluzzjoni, u x'inhi din is-soluzzjoni.

Din is-sistema ghandha qawwa kbira. Per ezempju, l-orbiti tal-qamar mad-dinja u tad-dinja max-xemx huma certi kurvi jssejjhu *ellipse.* Mur oqghod pingihom! Imma mhux daqshekk difficli tikteb l-ekwazzjonijiet ta' dawn l-orbiti, u permess ta' algebra fuq dawn l-ekwazzjonijiet tkun tista' ssolvi problemi bhat-tbassir ta' l-eklissi.

Issa b'din il-firda minn dak li hu purament kalkolu bin-numri, il-matematika tibda tidher ghal hafna li hija astratta u maqtugha mir-realta'. Imma dan l-aspett tal-matematika, igifieri li hija loghob u manipolazzjoni bis-simboli, huwa l-qofol ta' haga illi qieghda dejjem issir aktar konkreta u reali fil-hajja

taghna illum: il-computer.

Il-computer qed jinfiltra daqshekk fil-hajja ta' kuljum appuntu ghaliex m'huwiex sempliciment calculator kbir, imma huwa makna illi timmanipola s-simboli jew l-informazzjoni. Anki meta jkun qed jaghmel kalkoli numerici, ikun qed jaghmel hekk billi, fil-memorja tieghu, ikun qed icaqlaq bicciet ta' informazzjoni, skond certi regoli. Qiesna meta konna l-iskola u konna nimmanipolaw dawk l-ittri skond ir-regoli ta' l-algebra.

U kemm hi importanti l-kapacita' tal-kompjuter li jimmanipola informazzjoni mhux numerika narawha fl-istorja tal-komputer u fil-mod kif il-computer qed isir aktar importanti fil-hajja ta' kuljum. Fl-ewwel snin tal-computer l-aktar li kien jintuza kien biex islovi problemi numerici. Ghalhekk tista' tghid li hadd ma kellu uzu ghal computer id-dar. Kienu juzawh biss xjenzati u enginiera u specjalisti ohra. Imma biz-zmien il-computers bdew jaghmlu xoghol mhux numeriku, bhal wordprocessing. Din hi applikazzjoni li m'hemmx ghalfejn tkun inginier jew specjalista f'xi qasam xjentifiku biex issib uzu ghaliha. Illum applikazzjonijiet ta' dan it-tip qed jizdiedu kuljum: izommlok lista ta' klijenti, ifakkrek fl-appuntamenti, tikkomunika bih, tilghab, tiddizinja poster. Kollha huma attivitajiet li ma jidrux li jinvolvu matematika. Imma kollha taghmilhom makna billi timmanipola simboli u li l-kuncetti bazici li fuqhom hi mibnija fassluhom matematici, appuntu ghaliex il-matematika tistudja kif *patterns* ta' simboli jistghu jigu immanipolati. U l-bidu ta' dan l-istudju huwa l-algebra li nibdew nitghallmu l-iskola.

Meta nsemmi l-algebra niftakar ukoll f'l-influwenza importanti hafna tal-kultura Izlamika fuq il-matematika tal-lum. Il-kelma "algebra" innifisha gejja mill-Arbi *al-jabr*, igifieri li tigbor. Din il-kelma ittiehded mill-isem ta' ktieb ta' al-Khwarizmi li kien matematiku Izlamiku importanti u li kien ighix fid-disa' seklu. Ghandi hin biss insemmi haga wahda importanti li tawna l-matematici Izlamici, u li adottawha mill-Hindus: il-mod kif niktbu n-numri, partikolarment l-uzu tan-numru zero. Tafu li ghalkemm nistghu niktbu kull numru, kbir kemm hu kbir, dan naghmluh billi nuzaw biss ghaxar simboli: il-1, 2, . . . , 9 u simbolu ghaz-zero (ghalhekk insejhulha s-sistema decimali, ghax ghaxar simboli).

Kif jirnexxilna naghmlu dan? Allavolja ghandna biss ghaxar simboli, dawn jistghu ifissru valuri diversi. Per ezempju, is-simbolu ghan-numru erba'. Jekk niktbu wahdu isarraf erba', imma jekk nikteb is-simbolu ghan-numru hamsa warajh, igifieri nikteb "45", is-simbolu jigi jsarraf erbghin. Jekk nikteb 444, igifieri erba' mija u erba' u erghajn, inkun nizzilt l-istess simbolu tliet darbiet, imma t-tliet darbiet isarraf differenti: wiehed minnhom isarraf erba', l-iehor isarraf erbghajn, u l-iehor isarraf erba' mija. F'din is-sistema il-valur ta' kull simbolu jiddependi mill-pozizzjoni tieghu.

Issa x'jigri jekk irrid nikteb in-numru erba' mija b'din is-sistema? Jekk nikteb biss is-simbolu ghan-numru erba', dan wahdu isarraf erba'. Imma

jekk innizzel xi zewg numri ohra warajh, ikolli numru li jsarraf aktar minn erba' mija. Ghalhekk, ghandi bzonn xi simbolu li hu m'ghandux valur imma jekk niktbu darbtejn wara s-simbolu ghall-erba' jurini li dan qieghed fil-puzizzjoni tal-mija. Dan is-simbolu huwa z-zero, u erba' mija ghalhekk jinkiteb 400.

Tidher idea semplici hafna. U hekk hi—imma wara li tkun rajtha!

Qed naraw li fil-fatt, anki f'dak li hu kalkolu numeriku, qed jispikka dak l-aspett tal-matematika li semmejt meta bdejt nitkellem dwar l-algebra, igifieri manipolazzjoni ta' patterns u ta' simboli. Fix-xoghol ta' al-Kwharizmi hemm hafna metodi—speci ta' ricetti—kif timmanipola n-numri biex tikkalkola. Bhal dawk ir-ricetti elementari illi nitghallmu l-iskola primarja, bhal meta nghoddu u naghmlu il-*carry* bl-ingliz, igifieri intellghu numru fil-kolonna li jmiss meta t-total jaqbez l-ghaxra, jew nissellfu mill-kolonna li jmiss meta nkunu qed innaqqsu.

Il-lum l-istudju ta' dawn ir-ricetti sar importanti hafna ghaliex dak hu l-mod kif nipprogrammaw kompjuter jaghmel kalkolu jew kwalunkwe haga ohra. Il-kelma teknika ghal ricetti matematici hija *algorithm*. L-istudju ta' algorithms huwa illum fergha importanti immens fil-matematika u x-xjenza tal-kompjuter, u fi programm iehor nitkellem aktar fuqha. Ghalkemm dan l-istudju ha importanza kbira hafna dan l-ahhar snin, il-kelma algorithm m'hijiex xi kelma gdida—fil-fatt gejja appuntu minn al-Kwharizmi, isem il-matematiku tad-disa' seklu li semmejt. Dan ifakkarna kemm il-progress li l-bniedem jaghmel huwa dejjem mibni fuq x'ghamlu dawk ta' qabel.

Insomma, donnu ergajna gejna lura ghal dak li bdejna bih, igifieri ghall-manipolazzjoni tas-simboli; ghaxar simboli biex nirraprezentaw in-numri kollha. Ghaliex ghaxar simboli? Forsi ghax ghandna ghaxart iswaba, u meta l-bniedem l-ewwel tghallem ighodd kien ghalhekk ighodd bl-ghaxriet. Imma stajna kellna seba', jew tnax jew tliet simboli biss, u xorta b'din is-sistema kienu jservuna biex nirraprezentaw in-numri kollha.

U la ghadni kif ergajt semmejt l-computer, ha naghlaq b'dan il-kumment. Jekk tidher stramba illi b'ghaxar simboli biss nistghu nirraprezentaw in-numri kollha, oqoghdu ahsbu ftit illi l-computer jaghmel dak kollu li narawh jaghmel billi, effettivament, jimmanipola zewg simboli biss, il-wiehed u iz-zero: dak iz-zero li kif kienu diga kienu jafu l-matematici Izlamici elf sena ilu, huwa s-simbolu essenzjali biex is-sistema tahdem.

3 Il-Geometrija

Kolonna ohra principali li fuqha hi mibnija l-matematika, forsi l-aktar kolonna importanti, hija l-geometrija. Fil-fatt, l-istorja tal-matematika kif nafuha illum u l-istorja tal-geometrija imorru id f'id. U l-matematika kif nafuha illum ghandha l-origini fil-Grecja Antika, b'ismijiet bhal Euclid, Arkimede

u Pitagora. Qabel il-Griegi kien hemm kulturi li kienu jafu ftit geometrija mhux hazin. L-Egizzjani, per ezempju, kienu jafu jikkalkolaw sew biex bnew il-piramidi. Il-geometrija kienet importanti hafna ghall-Egizzjani ghaliex kull sena, wara li kienet tfur ix-xmara Nil, kien ikollhom jergghu jikkalkolaw il-linji li jisseparaw l-art ta' wiehed minn dik ta' iehor. Fil-fatt il-kelma geometrija tfisser il-kejl jew il-qies ta' l-art, u propju giet minn din l-attivita' ta' l-Egizzjani.

Imma kienu l-Griegi li bdew jistudjaw il-geometrija b'mod sistematiku. U l-metodu li uzaw ghadu essenzjalment il-mod kif issir il-matematika illum. Kienu irragunaw hekk. L-ewwel tikteb lista ta' l-affarijiet li sa titkellem fuqhom: fil kaz tal-geometrija, punti, linji, crieki ecc. Imbaghad tikteb lista ta' kundizzjonijiet jew propjetajiet li ghandhom dawn l-oggetti u li ma jistax ikun hemm dubbju dwarhom. Dawn il-propjetajiet jissejhu assjomi *axioms.* Per ezempju: jekk ikollok tliet numri, ta' wiehed daqs tat-tieni, u tat-tieni daqs tat-tlieta, allura bilfors ta' l-ewwel irid ikun daqs tat-tielet. Ezempju iehor: Jekk tpingi zewgh punti fl-ispazju dejjem tista' tpingi linja dritta minn wiehed ghall-iehor. Kollha huma affarijiet li tant jidhrilna li huma ovvji li lanqas biss nipprovaw insibu argumenti favurhom—dawn huma l-assjomi, u kollox jibda' minnhom. Wara li tikteb l-assjomi, kull rizultat iehor li ssemmi irid isegwi b'mod strettament logiku minn dawn l-assjomi. Dawn ir-rizultati jissejjhu teoremi.

B'dawn il-kuncetti il-Griegi hallewlna wirt intellettwali tremend ghax mhux biss b'dan il-metodu il-Griegi effettivament holqu l-matematika kif nifmuha illum, imma influwenzaw hafna kif nahsbu anki barra mill-matematika. Min spicca l-iskola ftit snin ilu zgur jiftakar li l-geometrija li kien jaghmel kienet ta' dan it-tip, igifieri tikteb il-kundizzjonijiet li taghtik il-problema u, pass pass tasal ghar-rizultat b'mod logiku u spjegat. Sfortunatament, minflok li dan it-tip ta' taghlim gie immodernizzat biex jappella aktar ghall-istudenti tal-lum, qed jitnehha minn hafna sillabi fl-iskejjel u b'hekk hafna studenti qed jispiccaw l-iskola minghajr ma qatt ikun raw x'inhu l-veru metodu matematiku.

Xhieda ta' kemm kienet profonda il-matematika tal-Griegi hi li ghadd ta' problemi li huma kienu jistudjaw gew solvuti jew sabu applikazzjoni hafna snin warajhom u dawn is-soluzzjonijiet u applikazzjoni kienu ta' natura li il-Griegi stess qatt ma kienu jistghu joholmu. Jien inqabbilha din ma bicca xoghol ta' arti jew letteratura importanti hafna. Per ezempju, poezija tista' tkun twila ftit faccati, imma jinkitbu kotba shah dwarha. Possibli l-awtur tal-poezija kien diga ra dak kollu li sa jinkiteb dwar xoghlu? Il-fatt importanti hu li l-kobor ta' xoghol l-awtur kien appuntu li rnexxilu jolqot nerv haj u fundamentali u ghalhekk wassal ghal dawk ix-xoghlijiet l-ohra kollha li forsi hu stess lanqas seta' jobsor bihom.

Ha naghti tliet ezempji ta' dan li qed nghid mill-geometrija tal-Griegi. Minn kien jaghmel geometrija fl-iskola forsi jiftakar il-kostruzzjonijiet bir-

riga u l-kumpass. Per ezempju, jekk ikollok angolu, tista' taqsmu f'zewg angoli ugwali billi tuza biss riga u kumpass. Il-mistoqsija li tohrog hi: Tistax taqsam kwalunkwe angolu fi tliet angoli indaqs b'riga u kumpass? Bi strumenti ohra facli taghmilha, imma l-Griegi kien jinteressahom li jaghmluha b'riga u kumpass biss mhux ghal xi raguni prattika imma ghaliex kienu iqisuh metodu aktar eleganti u ghaliex ic-cirku u l-linja dritta kienu iqisuhom figuri perfetti. Kellu jkun aktar minn elfejn sena wara li din il-problema giet solvuta biex issa nafu li mhux possibbli taqsam kwalunkwe angolu fi tlieta b'riga u kumpass—u s-soluzzjoni tinvolvi ideat importanti u profondi hafna fl-algebra moderna, ideat li zgur il-Griegi innfushom ma setghu jimmaginaw.

It-tieni ezempju: Il-Griegi kienu studjaw f'hafna dettall dawk li jissejjhu il-*conic sections*, dawk il-kurvi li jigu minn sezzjonijiet ta' *cone* jew lembut. X'inhuma dawn? Jekk tiehu lembut u taqta *slice* minn gol-lembut, jekk il-qatgha taghmila parallela mal-bazi tal-lembut, l-i*slice* jaqta' forma ta' cirku—u c-cirku huwa l-aktar conic section semplici. Imma jekk l-i*slice* taqtghu angolat, jista' jkollok cirku sfurmat jew zenguli. It-tip ta' kurvi li jista' jkollok huma l-conic sections, u dawn jistghu ikunu, per ezempju, parabola jew ellipse. Il-Griegi kienu jistudjaw dawn il-kurvi mhux ghax raw xi applikazzjonijiet prattici fihom imma essenzjalment ghaliex kellhom matematika sabiha u interessanti. Imma kwazi elfejn sena wara, l-astronomu Kepler, wara hafna snin jipprova jifhem x'orbita iduru fiha l-pjaneti madwar ix-xemx, wera li din l-orbita kienet ellipse, wahda mill-conic sections li kienu studjaw il-Griegi; u kien grazzi ghax-xoghol tal-Griegi fuq dawn il-kurvi li Kepler kien jaf biz-zejjed dwarhom biex jikseb is-sejbiet tieghu.

It-tielet ezempju li rrid ingib hu dik il-problema li harget mill-geometrija tal-Griegi li forsi l-aktar li qanqlet diskussjoni kemm matematika u kemm filosofika. Kif ghidna, il-geometrija tal-Griegi kienet ibbazata fuq assjomi. Kellhom hames assjomi geometrici. Il-hames wahda kienet tghid illi jekk tpingi linja dritta dejjem tista' tpingi linja ohra li hi parallela maghha, igifieri iz-zewg linji ma jiltaqghu qatt, ittawwalhom kemm ittawwalhom. Din l-assjoma ma' kinitx daqshekk semplici u ovvja daqs l-ohrajn, u ghalhekk anki l-Griegi ma kinux daqshekk kuntenti biha. Imma ma setghux ighaddu minghajrha, ghax inkella xi teoremi li xtaqu jippruvaw ma kienux isegwu logikament mill-assjomi l-ohra biss. Lanqas ma setghu isibu assjoma aktar semplici biex tiehu postha.

Din it-tficcijja ghas-simplifikazzjoni tal-hames assjoma baqghet sejra anki hafna snin wara l-Griegi. Sakemm aktar minn elfejn sena wara, zewg matematici, ir-russu Lobachevsky u l-Ungeriz Bolyai, minflok ma accettaw il-hames assjoma qallbuha u raw x'jigri jekk tassumi li zewg linji dritti dejjem jiltaqghu, igifieri ma jeziztux linji paralleli. Lobachevsky u Bolyai sabu li b'hekk jistghu jikkostruwixxu geometrija stramba li ma kinitx Euclidjana, igifieri ma kinitx bhal dik tal-Griegi. Wara dan, il-matematici indunaw li tista' tohloq geometriji ohra billi tbiddel xi uhud mill-assjomi. Qiesek qed tivinta loghba gdida billi tivvinta regoli (l-assjomi) godda.

Imma ghal hafna snin dawn il-geometriji kienu meqjusa appuntu hekk, loghbiet matematici, sbieh u interessanti, imma li ma jirriflettux ir-realta'. Il-geometrija Euclidjana kienet ghadha ikkonsidrata bhala dik li tispjega verament kif inhu l-ispazju ta' madwarna. Imma bi zviluppi fil-fizika moderna, specjalment bit-teorija tar-relattivita', ix-xjentisti intebhu, kuntrarjamanet ghal x'kienu jahsbu l-filosofi ghal aktar minn elfejn sena, illi wara kollox dawn il-geometriji mhux Euclidjani jispjegaw kif verament hu l-ispazju ahjar milli tispjagah il-geometrija tal-Griegi.

Dawn l-izviluppi wasslu biex illum ghandna kuncett differenti ta' x'inhi l-matematika u x'relazzjoni ghandha mad-dinja ta' madwarna. Essenzjalment il-matematika illum inqisuha bhala xi loghba jew loghbiet. Tista' tbiddel l-assjomi u jkollok loghba differenti, bhalma assjomi differenti jaghtuk geometriji differenti. Jekk l-assjomi ma jwasslux ghal kontradizzjoni, dawn il-loghbiet, dawn is-sistemi matematici, kollha jistghu ikunu validi, bhalma l-geomtriji Euclidjani u dawk mhux Euclidjani huma kollha matematikament validi.

Allura liema minn dawn is-sitemi huma mudell tad-dinja ta' madwarna? Din il-mistoqsija ma tantx ghad ghandha risposta daqshekk cara illum, u lanqas ghadu zgur kemm fil-fatt taghmel sens din il-mistoqsija. Uhud minn dawn is-sistemi matematici ma jirraprezentawx id-dinja ta' madwarna—jew ghadna ma nafux kif jirraprezentawha. Ghal certi sistemi ohrajn jigri li kultant, taht certi kundizzjonijiet ikollna nadattaw sistema biex nifhmu d-dinja ta' madwarna, u taht kundizzjonijiet ohra ikollna nadottaw sistema differenti. Per ezempju, jekk qed taghmel pjanta ghal-dar, il-geometrija Euclidjana hi dik li ghandek bzonn. Imma jekk qed tikkalkula l-orbita tal-pjaneta Merkurju, per ezempju, ikollok tuza geometrija mhux Euclidjana biex tirraprezenta l-ispazju.

Il-geometrija zviluppat ukoll f'direzzjonijiet ohra. Per ezempju, tfacca l-bzonn ta' geometrija li ma kinitx tiddependi fuq distanzi u angoli. Naghtikom ezempju. Nahseb hafna minnkom mortu f'xi belt bhal Londra, jew Parigi jew Milan fejn hemm underground, it-trasport bi *trains* taht l-art. Biex tkun taf jekk tistax tmur minn stazzjon ghall-iehor direttament jew tridx tbiddel, tuza mappa ta' l-underground. Din il-mappa bhal tat-toroq: turik hemmx konnessjoni bejn stazzjon u iehor, imma ma taghtikx kejl ta' tul ezatt tal-linja ta' bejniethom u x'angolu u direzzjoni tiehu l-linja. U lanqas ma ghandek bzonn tkun taf x'tul hemm. Ghalik l-importanti hu hemmx konnnesjjoni jew le. L-inginiera li jiehdu hsieb il-manteniment tal-linji iridu ikun jafu distanzi ezatti, imma l-passiggieri ma hemmx ghalfejn. Il-geometrija li l-passiggieri ghandhom bzonn u li l-mappa taghtihom hija geometrija ta' puzizzjoni mhux ta' distanza.

Din it-tip ta' geometrija tissejjah *topologija*, u giet studjata ghall-ewwel darba mill-matematiku Svizzeru Leonhard Euler fis-seklu tmintax. Topologija ma tfissirx studju tal-grieden imma studju tal-puzizzjoni.!

U naghlaq billi nsemmilkom problema li giet mit-topologija u li hafif tispjegaha. Din hi forsi wahda mill-aktar problemi maghrufin fil-matematika moderna. Naghmlu mod qed inpingu mappa. Tista' tkun mappa ta' xi parti mid-dinja, jew mappa fittizja li ivvintajniha ahna. Nixtiequ naghtu kuluri lill-pajjizi b'tali mod li zewg pajjizi li ghandhom fruntiera komuni ikollhom kulur differenti, halli ikunu jistghu jintgharfu minn xulxin. Ghal hafna snin kien hemm min induna li, tkun kemm tkun ikkumplikata il-mappa, u jkollha kemm ikollha pajjizi, erba' kulur dejjem biz-zejjed. Imma ghal aktar minn mitt sena, hadd ma rnexxilu isib prova assoluta ta' dan ir-rizultat. Il-prova instabet xi sittax il-sena ilu. Din il-prova hija maghrufa hafna ghax tant hija twila u fiha kazijiet illi bilfors trid kompjuter biex jivverifika l-argumenti kollha li fiha—u din il-verifika iddum hafna sieghat.

Din hi ezempju ta' problema li s-soluzzjoni taghha ftit li xejn ghandha utilita' prattika. Imma il-fatt li hi problema daqshekk facli biex tispjegaha imma daqshekk difficili biex tipprovaha turi li hemm xi haga fundamentalment importanti fiha. Dawn huma it-tip ta' problemi li matematici l-aktar li jhobbu jistudjaw.

4 L-iStatistika

Il-fergha ta' matematika li rrid nitkellem fuqha illum hija l-istatistika, partikolarment kif din tintuza fi stharrig ta' opinjonjiet pubblici. Mhux ghax nahseb illi l-istatistika hija fundamentali ghall-matematika daqs kemm huma, per ezempju, il-geometrija u l-algebra, imma ghaliex l-istatistika hija fergha tal-matematika li tissemma sikwiet u li forsi anki tinfluwenza kif nahsbuha fuq certi affarijiet.

Kwazi kuljum sirna nisimghu li sar xi stahhrig fost in-nies fuq kwistjoni jew ohra. Per ezempju, nisimghu li minn stahhrig tant fil-mija mill-popolazzjoni jisimghu it-tali stazzjon tar-radju, jew tant raw it-tali programm il-bierah fuq it-televizjoni. Nisimghu li it-tali prodott jixtruh tant nies. F'hafna pajjizi kontinwament jippubblikaw stharrig li jindika liema partit politiku n-nies ikunu l-aktar qed jappoggaw dak il-hin.

Kif jaslu ghal dawn il-figuri? Zgur mhux possibbli li jmorru ghand kulhadd u jistaqsuh kif jahsibha fuq din il-haga u fuq l-ohra, ghax inkella ma jispiccaw qatt. Li jaghmlu hu li jiehdu kampjun—*sample*—ta' nies mill-popolazzjoni. Imma fejn taf li l-kampjun jirrifletti fedelment kif jahsbuha l-kumplament tal-popolazzjoni? Kif ghandek taghzlu l-kampjun? Kif sa tikkalkula mill-kampjun il-figura li ghandek bzonn ghall-popolazzjoni kollha? Ix-xjenza ta' l-istatistika inholqot appuntu biex tirrispondi dawn il-mistoqsijiet.

Ha naghti l-ewwel ezempju hafif fejn johrog car li bil-fors ikollok tuza kampjun, u ghalhekk bilfors ikollok tuza l-istatistika. Naghmlu mod manager ta' fabbrika tas-sulfarini jixtieq ikun jaf kemm, mis-sulfarini li qed jip-

producu, huma difettuzi. Jistaqsina naghmlulu studju biex naghtuh risposta. Naghmlu mod il-fabbrika tipproduci ghaxart elef sulfarina kuljum. L-aktar mod cert biex naghtu risposta lill-manager ta' din il-fabbrika hu li nipprovaw l-ghaxart elef sulfarina u naraw kemm minnhom jaqbdu mal-ewwel u kemm huma difettuzi. Nahseb li jekk naghmlu hekk la l-manager u lanqas l-accountant tal-fabbrika ma jiehu pjacir bina! Li jkollna bil-fors naghmlu minflok hu li niehdu kanpjun—*sample*—mill-ghaxart elef sulfarina, u nipprovaw lilhom biss. Per ezempju, niehdu kampjun ta' mitt sulfarina. Billi nahlu mitt sulfarina minn ghaxart elef mhux sa nfallu l-fabbrika. Anzi, mija huwa numru zghir biz-zejjed li forsi inkunu nistghu nirrepetu l-esperiment kuljum ghal gimgha shiha, per ezempju, biex ikollna stampa aktar cara ta' kif il-kwalita' tal-produzzjoni qed tvarja minn jum ghall-iehor. U hawn naraw vantagg li tiehu kampjun: jiswa' anqas, u tista' tirrepeti l-esperiment aktar sikwiet.

Mela ejja nassumu li hadna dan il-kampjun ta' mitt sulfarina, u sibna li tlieta minnhom kienu difettuzi. Nikkonkludu li tlieta fil-mija tal-produzzjoni kollha tal-gurnata hija difettuza, igifieri, tliet mija mill-ghaxart elef sulfarina huma difettuzi. Nistghu nghidu hekk? Irridu noqoghdu ftit attenti. Naghmlu mod il-fabbrika ghandha numru ta' workshops, uhud b'makkinarju modern, ohrajn b'makkinarju ftit aktar antik. Jekk il-kampjun ta' mitt sulfarina hadnihom mill-produzzjoni tal-workshops l-antiki, allura mhux qed inkunu fair mal-fabbrika, u wiehed jistenna illi fil-fatt anqas minn tlieta fil-mija tal-produzzjoni total hija difettuza. Minn naha l-ohra, kieku l-kampjun ta' mija hadnihom kollha mill-workshops il-moderni, allura inkunu qed niffavurixxu l-fabbrika u probabbli aktar minn tlieta fil-mija tal-produzzjoni hija difettuza.

Dawn huma ezempji ta' kampjuni li jissejhu *biased*, igifieri li tant ixaqilbu lejn naha jew ohra illi ma tantx tista' jista' jkollok fiducja illi jirraprezentaw il-popolazzjoni kollha li gew minnha. F'dan il-kaz, biex ikollna kampjun li mhux biased, l-ehfef mod hu li niehdu l-ghaxart elef sulfarina, inqeghduhom fi xkora kbira, inhawwduhom sew, u naghzlu l-mija bix-xorti. Bejn wiehed u iehor hekk isir meta jaghmlu starrig fost il-pubbliku. Jiehdu lista ta' l-ismijiet kollha, per ezempju xi registru elettorali, u jaghzlu l-ismijiet ghall-kampjun bix-xorti minn din il-lista. Bhal fil-kaz tal-workshops tal-fabbrika li qed nuza bhala ezempju, jekk tiehu nies minn xi distretti u mhux minn ohrajn, jista' jkollok kampjun biased, u rizultati mhux ta' min wiehed joqghod fuqhom—per ezempju, jekk qed tistaqsi mistoqsijiet ta' natura politika.

Mela ejja nassumu illi ghandna sample mhux biased. X'certezza ghandna illi l-kampjun jirrifletti l-popolazzjoni kollha? Nergghu immorru lura ghall-ezempju ta' fabbrika tas-sulfarini. Nirrappurtaw lill-manager illi sibna li tlieta fil-mija tal-produzzjoni tieghu hija difettuza, igifieri tliet mija mill-ghaxart elef. U l-manager jistaqsina: Jista' jkun li, minkejja l-prekawzjonijiet kollha li hadtu biex ghaziltu bix-xorti sample mhux biased, xorta kontu sfor-

tunati u misskom aktar sulfarini difettuzi fil-kampjun milli kemm fil-fatt hu l-proprozjon totali? Jista' anki jaghti l-kaz li fl-ghaxart elef sulfarina mhux tliet mija hemm difettuzi imma tlieta biss, u b'kumbinazzjoni dawn it-tlieta inzertaw kollha fil-kampjun taghkom? U r-risposta taghna ghandha tkun li ma nistghux naghtu garanzija mija fil-mija illi ma grawx xi kumbinazzjoni-jiet kif qed ighid il-manager.

U hawn nahseb li huwa fejn l-aktar li l-statistika tintuza hazin. Hawn min donnu jahseb illi jekk il-kampjun tieghek m'huwiex bised u huwa kbir biz-zejjed, ir-rizultati li tohrog minnu huma riflessjoni certa tal-popolazzjoni kollha. U dan m'hu veru xejn. Lill-manager tal-fabbrika irridu nghidulu illi l-uniku mod biex ikun cert mija fil-mija kemm mis-sulfarini li jipproduci huma difettuzi hu li jipprovahom kollha. Jekk jiehu kampjun, anki kampjun kbir, dejjem sa jkollu certu ammont ta' incertezza. U hawnhekk tidhol ix-xjenza ta' l-istatistika, biex tikkalkula dik l-incertezza li tinqala' mill-possibilita' ta' kumbinazzjonijiet bhal ma semmejt diga. Jekk imbaghad l-incertezza tkun kbira wisq, allura ir-rizultat taghna ma tantx tkun tista' toqghod fuqu. Jekk l-incertezza tkun zghira, allura naccettaw ir-rizultat. L-istatistika ma tghidilnhiex x'inhi incertezza kbira jew zghira. Ma tghidilniex ghandniex naccettaw jew le ir-rizultat tal-kampjun. Turina biss kif nikkalkolaw l-incertezza. Jekk il-livell ta' incertezza huwiex accettabbli jew le hija decizjoni taghna li tiddependi fuq x'tip ta' ricerka qeghdin naghmlu.

Dawn il-kalkoli statistici jiddependu hafna fuq it-teoriji tal-probabilita'; qiesek qed tikkalkula l-probabilita' li tirbah f'lotterija. Inkomplu bl-ezempju tal-fabbrika tas-sulfarini. Naghmlu mod il-manager jinsisti li tlieta biss mis-sulfarini huma difettuzi, u t-tlieta inzertaw fil-kampjun ta' mija. Veru jista' jkun li b'kumbinazzjoni gara hekk, imma x'inhuma c-cansijiet li jigri hekk? Kif ghidt, qiesek qed tahdem il-probabbilita' li tirbah loterija. Hemm ghaxart elef numru, tliet minnhom ir-rebbieha. Int sa taghzel mija minnhom bix-xorti. X'inhuma c-cansijiet li t-tliet numri rebbieha ikunu fost it-mija li taghzel? Ftit kalkolu mhux difficli wisq juri li l-probabilita' li din tigri hija anqas minn wiehed fil-mitt elf miljun! Veru fula f'qamar. Jekk nuru dawn il-kalkoli lill-manager u dan ikun jirraguna, zgur li ma jibqax jinsisti li tliet sulfarini biss kellu difettuzi.

Bejn wiehed u iehor dan hu l-mod li x-xjenza ta' l-istatistika tintuza biex naghmlu sens minn surveys li jsiru. Jekk per ezempju nintervista kampjun ta' nies (mhux biased) biex nara kemm minnhom jaraw televizjoni kuljum, mhux biz-zejjed li nohrog nghid, per ezempju, li aktar minn nofshom jaraw televizjoni kuljum. Suppost naghti ukoll x'livell ta' incertezza hemm fil-figuri tieghi. Jekk per ezempju sibt li 51% fil-mija ta' dawk li kellimt jaraw televizjoni kuljum, u l-livell ta' incertezza huwa aktar minn 1%, allura ma tantx ghandi evidenza qawwija li aktar minn nofs il-popolazzjoni tara tv kuljum.

U din l-attenzjoni trid tkun akbar meta l-ghan ta' l-istharrig ikun aktar

ambizzjuz. Per ezempju, jekk tkun trid issib relezzjoni bejn fattur u iehor. Bhal, nghidu ahna, tisma' li sar stharrig li wera li tfal li jaraw hafna televizjoni immorru aghar fl-iskola. Hawnhekk il-mod kif taghzel il-kampjun, il-kalkoli ta' l-incertezzi, u l-mod ta' kif tinterpreta l-figuri isiru aktar ikkomplikati.

Ix-xjenza ta' l-istatistika xoghlha huwa li taghmel dan l-analizi. Imma peress li dan l-analizi mhux dejjem hu hafif, allura mhux dejjem isir. U anki meta jsir, il-medja ma ghandhiex hin toqghod tirrapporta hafna dettalji. Allura tiehu t-triq il-hafifa, u tirrapporta ftit figuri, generalment dawk li l-aktar jistghu joholqu ahbar, minghajr spjegazzjoni. Kultant, min jaghmel l-istharrig ikollu interessi li jmexxi l-quddiem xi prodott jew xi idea, u ghalhekk ma jkunx jaqbillu ighid l-istorja kollha.

Ghalhekk wiehed jista' jistaqsi: Dawn l-istharrig ta' l-opinjoni pubblika, isiru biex jinfurmawna kif nahsbuha, jew biex jinfluwenzaw kif nahsbuha? Jekk jien ghandi prodott gdid fuq is-suq, min jaf inzidx l-interess fih jekk nohrog nghid li ghamilt stharrig u sibt li disghin fil-mija ta' dawk li kellimna diga qed juzaw il-prodott tieghi, anki jekk forsi dan l-istharrig ma ghamiltux jew ma tanix dan ir-rizultat? Dan it-tip ta' manipolazzjoni jista' jkun serju hafna, per ezempju, fil-kamp politiku. Tant hu hekk li f'certi pajjizi hemm ligijiet li fil-granet ta' qabel l-elezzjoni mhux permess li thabbar rizultati ta' stharrig pubbliku li jkunu ta' natura politika, tant jahsbu li hu qawwi dan l-effett.

U hawn qed naraw aspett importanti tas-socjeta moderna u teknologika. Ghalkemm l-izviluppi teknologici qed iwasslu biex kull individwu fis-socjeta ikollu access ghal aktar informazzjoni, u din twassal ghal socjeta aktar demokratika, biex l-individwu jifhem u janalizza sew dik l-informazzjoni qieghed dejjem irid ikollu aktar gharfien—min jibqa' lura aktar isib ruhu f'sitwazzjoni li l-informazzjoni li jircievi, flok ma tghallmu, tfixklu u tqarraq bih.

5 Il-Matematika u x-Xjenza tal-Komputers

Illum ma tistax titkellem fuq il-matematika u l-influwenza taghha fuq is-socjeta' minaghajr ma ssemmi x-xjenza tal-computer. Qed nghid ix-xjenza tal-computer u mhux il-computer u kif tuzah. Ghax kif tuza computer fil-hajja ta' kuljum u fuq il-post tax-xoghol ma hiex dejjem ix-xjenza tal-computer, bhalma li tkun taf issuq karozza ma jfissirx li tkun tifhem fil-mekkanika.

Fil-mod kif inhu mibni l-computer u fil-mod ta' kif jahdem diga hemm hafna matematika. Imma illum ma rridx nitkellem fuq il-matematika ta' kif inhu mimbni computer. Irrid nitkellem fuq xi problemi li huma essenzalment problemi matematici, uhud minnhom ilhom jeziztu minn hafna qabel ma kien hawn il-komputer, imma li bil-computer hadu hajja gdida, u li

ghalhekk l-istudju taghhom sar kemm parti mill-matematika u kemm parti mix-xjenza tal-computer. U dawn huma problemi importanti hafna ghaliex ma ghandhomx biss interess teoretiku imma ghandhom hafna applikazzjonijiet.

Nibda b'ezempju ta' problema famuza hafna, maghrufa bhala l-problema tat-*Travelling Salesman.* Dalwaqt tindunaw ghaliex tissejjah hekk. Naghmlu mod ghandi bzonn inzur erba bliet fl-Ewropa: Londra, Parigi, Madrid u Ruma. Irrid nitlaq minn Malta, indur dawn l-ibliet wahda wahda, u nispicca lura Malta. S'intendi nixtieq naghzel dik ir-rotta li tqumli lanqas flus fi vjaggar bl-ajru. Allura immur ghand it-travel agent u nistaqsih isbli l-ahjar rotta. Ghandu diversi minn fejn ighazel. Per ezempju, nista' mmur Malta-Madrid-Londra-Parigi-Ruma-Malta. Jew, Malta-Londra-Parigi-Madrid-Ruma-Malta. It-tarvel agent ghandu l-prezzijiet ta' vjagg minn kull belt ghal ohra, u xogholu hu li jara kemm tqum kull wahda minn dawn ir-rotot, u jaghzilli l-irhas. B'kollox ghandu 24 rotta x'jiccekkja. Jekk jiddejjaq jaghmel dawn il-kalkoli jista' forsi jikteb programm fuq computer biex jahdimhomlu hu. Imma jaghmilha kif jaghmilha, 24 rotta m'humiex wisq.

Imma naghmlu mod li flok erbat ibliet irrid inzur ghoxrin belt. In-numru ta' rottot li jrid jiccekkja jikber gmielu u issa zgur ikollu bzonn computer. Naghmlu mod ghandu l-programm lest fuq il-computer, idahhal fil-computer l-ismijiet tal-bliet li rrid inzur, u l-prezzijiet ta' vjagg bejn kull belt u ohra, u jhallih jahdem. Ejja naghmlu mod li l-computer kapaci jiccekkja ghaxar miljun rotta fis-sekonda. Kemm tahsbu li jdum biex jiccekkja r-rotot kollha? Tinstema inkredibbli imma ma hemmx bzonn xi matematika ikkomplikata biex tivverifikaha: il-computer b'din ir-rata idum mas-7700 sena biex jiccekkja r-rotot kollha!

Forsi tghidli: Veru, il-programm li ghandek idum daqshekk, imma jista' jaghti l-kaz li ma ktibtx l-ahjar programm possibbli. Forsi jezizti programm miktub ahjar li hu aktar efficenti u li jsolvi l-problema f'qasir zmien. U hawn hu l-qofol ta' kollox: Hadd ghadu ma sab programm li jsolvi din il-problema f'qasir zmien. U l-misteru hu li hadd ghadu ma wera li ma jeziztix programm li jsolvi din il-problema f'qasir zmien. Is-sitwazzjoni hi sempliciment li hadd ma jaf jekk jistax jinkiteb jew le programm li jsolvi din il-problema f'qasir zmien.

Din hi sitwazzjoni li tqanqal hafna kurzita' fost il-matematici u x-xjenzati, ghax fejn jkollok problema li hi facli biex tispjegaha imma difficli biex issolviha zgur li hemm xi haga fundamentalment importanti. Imma ghandkom mnejn tghidu: Ma hijiex daqshekk important wara kollox din il-problem tat-*Travelling Salesman.* Kemm il-darba wiehed sa jkollu bzonn izur daqshekk postijiet? Veru, imma hemm raguni valida ghaliex din hi problema importanti hafna. Ghax bhal din il-problema hemm mijiet u mijiet ohrajn. Uhud minnhom huma ta' natura prattika: per ezempju, kif tfassal time-tables kbar, jew l-irhas mod kif tghaddi linji tat-telephone biex tghaqqad bliet ma' ohra. Ohrajn huma ta' natura aktar teoretika. Imma kollha ghand-

hom din il-karatteristika illi jekk xi hadd jikteb programm li jsolvi wahda minnhom f'qasir zmien allura dan il-programm isolvi lill-problemi l-ohrajn kollha f'qasir zmien.

U hekk naraw li n-natura fundamentali ta' dawn il-problemi tkompli tizdied, ghax jekk tipprova issolvi wahda minnhom tkun qed tipprova issolvi mijiet ta' problemi ohra f'daqqa.

Programm biex isolvi problema matematika huwa qiesu ricetta matematika. Dawn ir-ricetti jissejjhu *algorithms*. Allavolja qed nitkellmu dwar suggett modern, il-kelma algorithm, kif diga ghidt f'programm ta' qabel, ghandha origini antiki hafna, ghax fil-fatt il-kelma gejja mill-isem al-Kwharizmi, li kien il-matematiku Islamiku tad-disa' seklu li semmejt fi programm ta' qabel.

Il-mistoqsija jekk jeziztix algorithm efficenti ghal dawn il-problemi li semmejt, igifieri jekk jeziztix algorithm li jsolvihom f'qasir zmien, hija meqjusa minn hafna bhala l-problema principali fix-xjenza teoretika tal-computers illum.

Din il-problema turina fl-istess hin il-limitazzjoni u l-importanza tal-computer. Il-limitazzjonijet cari mill-problema. L-importanza ghaliex hafna minn dawn il-problemi kienu ilhom jeziztu hafna qabel il-kompjuter. Imma hadd ma kien jipprova jahseb wisq fuqhom b'dan il-mod ghax kienu kbar wisq biex tipprova issolvihom b'karta u lapes. Imma il-qawwa gdida li jaghti l-computer ghamlitha possibbli li dawn il-problemi jigu investigati u b'hekk bdew jitfaccaw mistoqsijiet godda.

Hawnhekk naraw haga li tirrepeti ruhha fl-istorja ta' l-izvilupp tal-bniedem. L-ghodda li l-bniedem holoq dejjem ghenuh biex hu jizviluppa l-kapacitajiet tieghu. Il-computer huwa l-ghodda l-aktar moderna li holoq il-bniedem, u qed naraw kif din l-ghodda qieghda tghin fl-izvilupp tal-bniedem billi mhux biss issolvi problemi eziztenti imma tissuggerilna problemi godda importanti bhala sfida ghall-kapacitajiet taghna u b'hekk tifthilna orizzonti godda ghall-progress.

Il-fatt li forsi ma jeziztix algorithm efficenti biex issolvi problemi bhal dik tat-*Travelling Salesman* wiehed jista' jqisu bhala xi haga negattiva. Imma anki hawn l-inventivita' tal-bniedem jirnexxilha iddawwar xi haga li tidher li hi negattiva f'xi haga utli. Naraw kif.

Fost il-problemi li ghad ma nstabx algorithm efficenti ghalihom hemm il-problema li ssib il-fatturi ta' numri kbar. Per ezempju, il-fatturi tan-numru 15 huma n-numri 3 u 5. Il-fatturi tan-numru 30 huma 2, 3 u 5. Ghal numri zghar hafif issib il-fatturi—din hija problema li jitghalmuha tfal ta' l-iskola. Imma meta n-numri ikunu enormi, lanqas l-akbar computers ma jistghu isibu l-fatturi f'qasir zmien.

Kif jintuza dan il-fatt? Problema importanti fit-telekomunikazzjoni hi kif wiehed jista' jibghat messaggi b'mod sigriet, jigifieri, messagg li jista' jiddecifrah biss min suppost jircevih, imma ma jinftehimx jekk il-messagg

jaqa' f'idejn hadd iehor. Hemm diversi metodi kif dan isir, imma ha nsemmi fuq fuq wiehed minnhom.

Ejja nghidu li int trid tibghatli l-messagg. X'naghmel? Niehu zewg numri kbar hafna, li nafhom jien biss, nimmoltiplikahom, u naghtik ir-rizultat. Anzi, nippubblika r-rizultat biex ikun jista' jintuza minn kull min irid jibghatli messag. Int taqbad il-messagg, u iddawwru f'*code* sigriet peremess ta' formula semplici li hi maghrufa minn kulhadd—imma f'din il-formula jidhol in-numru kbir li tajtek. Allura jekk in-numru tieghi jafu kulhadd mhux kullhadd jista' jiddecifra l-messagg? Le, ghaliex biex tiddecifra l-messagg mhux in-numru ghandek bzonn imma iz-zewg fatturi tieghu li jiena uzajt biex hloqt in-numru; u peress li ghadu ma nstabx algorithm li jsib il-fatturi ta' numri kbar f'qasir zmien, jien mohhi mistrieh li hadd ma jista' jsib dawn il-fatturi u jiddecifra l-messagg ikkodifikat.

U la qed nitkellem fuq fattorizzazzjoni ta' numri, ma nistax naghlaq dawn il-programmi fuq il-matematika minghajr ma nghid keltejn fuq dik il-fergha li tissejjah it-Teorija tan-Numri. Hawnhekk b'numri infissru in-numri s-shah, igifieri 1, 2, 3, ecc, minghajr frazzjonijiet, bhal $2\frac{1}{2}$, jew decimali, bhal 5.63. Is-sabih ta' dan is-suggett hu li jistudja forsi l-aktar oggetti semplici fil-matematika, imma li minnu johorgu uhud mill-aktar problemi tqal.

Fost dawn in-numri, l-aktar bazici u forsi l-aktar misterjuzi, u ghalhekk l-aktar studjati, huma n-numri primi. Numri primi huma dawk li ma ghandhom fatturi, per ezempju, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ecc. Numru prim igifieri huwa numru li, meta tiddividih, l-ebda numru shih ma jidhol ezatt fih, hlief hu innifsu u n-numru wiehed.

Ghal hafna snin it-teorija tan-numri kienet ikkonsidrata l-aktar fergha pura tal-matematika, igifieri l-aktar li ma kellhiex applikazzjoni. Imma dan l-ahhar snin din it-teorija qeghdin jinstabulha hafna applikazzjonijiet, per ezempju kif semmejt fuq dwar il-messaggi b'kodici sigriet.

Imma halli naghlaq billi insemmilkom problema pura (igifieri minghajr applikazzjonijiet) bhala ezempju ta' l-hafna mistoqsijiet apparentement semplici li hemm fit-Teorija tan-Numri. In-numri huma jew fart , ex 3, 5, 7, ecc, jew zewg, ez 2, 4, 6, ecc. Instab illi ghal kull numru zewg akbar minn 2 li gie ipprovat, dan tista' tiktbu bhala somma ta' zewg numri primi. Ez, 8=5+3; 28=11+17. Fit-tmintax-il-seklu, il-matematiku Russu Goldbach ghamel kongettura li tghid li dan il-fenomenu isehh ghal kull numru zewg akbar minn 2. Kongettura tfisser illi innotajt xi fenomenu, tohrog tghid li tahseb li l-fenomenu dejjem isehh, imma ma jkollokx prova. Il-kongetturi minn dejjem kienu importanti ghall-izvilupp tal-matematika; ghax kongettura maghmula bis-serjeta' minn min dahal sew fis-suggett hija sfida li tqanqal l-interess ta' matematici ohra biex jipprovawha jew iwaqqawha.

Ghalkemm din il-kongettura ta' Goldbach hija tant semplici biex tispjega u tifhimha, jidher li s-soluzzjoni taghha, jekk qatt tinstab, hija difficli immens. In-numru kbir ta' problemi semplici biex tifhimhom, imma fl-istess

hin tqal biex issolvihom, li hemm fit-Teorija tan-Numri, tispjega ghaliex din il-fergha tal-matematika hija fost l-aktar popolari anki fost min mhux matematiku professjonali.

U is-seher ta' dawn it-tip ta' problemi—hfief biex tghidhom imma tqal biex issolvihom—nahseb li hija r-raguni principali ghaliex hemm min jiddeciedi li sa jiddedikaw parti kbira minn hinu ghall-istudju tal-matematika.